

94106

**B. Sc. Mathematics 6th Semester
Examination – December, 2024
REAL AND COMPLEX ANALYSIS**

Paper : 12BSM-361

Time : Three hours]

[Maximum Marks : 40

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt *five* questions in all, selecting *one* question from each Section. Question No. 9 (Section-V) is *compulsory*. All questions carry equal marks.

प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्न हल करें। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड-V) अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान है।

SECTION – I

खण्ड – I

1. (a) Find the Jacobian of u, v, w w.r.t. x, y, z given that
 $u = x + y + z, v^3 = yz + zx + xy, w^5 = xyz$. 4
 u, v, w का x, y, z के सापेक्ष जैकोबियन मान ज्ञात करें, दिया है कि $u = x + y + z, v^3 = yz + zx + xy, w^5 = xyz$

(b) Show that :

$$B(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx, m > 0, n > 0$$

4

दर्शाइए कि :

$$B(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx, m > 0, n > 0$$

2. (a) Prove that :

4

$$\iint (x^2 + y^2)^{\frac{7}{2}} dx dy = \frac{2\pi}{9}$$

where R is the interior of circle $x^2 + y^2 = 1$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\iint (x^2 + y^2)^{\frac{7}{2}} dx dy = \frac{2\pi}{9}$$

जहाँ R वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ का आंतरिक भाग है।

(b) Using Dirichlet's theorem, find the volume bounded by the surface $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1$. 4

डिरिचलेट के प्रमेय का उपयोग करते हुए, पृष्ठ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1$ द्वारा परिबद्ध आयतन ज्ञात कीजिए।

SECTION - II

खण्ड - II

3. (a) If the series $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converges uniformly to a function f on $[-\pi, \pi]$, then it is the Fourier series for ' f ' on $[-\pi, \pi]$. 4

यदि शृंखला $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, $[-\pi, \pi]$ पर एक फलन f में समान रूप से अभिसरित होती है, तो यह $[-\pi, \pi]$ पर ' f ' के लिए फूरियर शृंखला है।

- (b) Find the Fourier expansion of $f(x) = x$ in $[-\pi, \pi]$. 4
 $[-\pi, \pi]$ में $f(x) = x$ का फूरियर विस्तार ज्ञात कीजिए।

4. (a) Obtain the Fourier expansion for $f(x)$, if $f(x) = \begin{cases} -\pi & , & -\pi < x < 0 \\ x & , & 0 < x < \pi \end{cases}$ 4

$f(x)$ के लिए फूरियर विस्तार ज्ञात करें, यदि $f(x) = \begin{cases} -\pi & , & -\pi < x < 0 \\ x & , & 0 < x < \pi \end{cases}$

- (b) Find the half-range cosine series for $f(x) = x(\pi - x)$ in the interval $(0, \pi)$. Hence deduce that : 4

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

अंतराल $(0, \pi)$ में $f(x) = x(\pi - x)$ के लिए अर्ध-श्रेणी कोसाइन श्रृंखला ज्ञात करें। इसलिए निष्कर्ष निकालें कि

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

SECTION - III

खण्ड - III

5. (a) Prove that the function $f(z) = z\bar{z}$ is continuous everywhere but nowhere differentiable except at the origin. 4

सिद्ध करें कि फलन $f(z) = z\bar{z}$ हर जगह सतत है लेकिन मूल बिंदु को छोड़कर कहीं भी अवकलनीय नहीं है।

- (b) If $f(z) = u + iv$ is an analytic function and $z = re^{i\theta}$, where u, v, r, θ are real, then CR-equations are
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$
 4

यदि $f(z) = u + iv$ एक विश्लेषणात्मक फलन है और $z = re^{i\theta}$ जहाँ u, v, r, θ वास्तविक हैं, तो CR समीकरण
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$
 हैं।

6. (a) Find the regular function whose imaginary part is
$$v = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$$
 4

नियमित फलन ज्ञात करें जिसका काल्पनिक भाग $v = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$ है।

- (b) If $f(z) = u + iv$ is an analytic function of z , find $f(z)$ if $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$. 4

यदि $f(z) = u + iv$ का एक विश्लेषणात्मक फलन z है, तो $f(z)$ ज्ञात करें यदि $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ ।

SECTION - IV

खण्ड - IV

7. (a) Determine the region in the w -plane corresponding to the triangular region bounded by the lines $x = 0$, $y = 0$ and $x + y = 1$ in the z -plane mapped under the transformation $w = ze^{\frac{i\pi}{4}}$. 4

रूपांतरण $w = ze^{\frac{i\pi}{4}}$ के अंतर्गत मैप किए गए z -तल में रेखाओं $x = 0$, $y = 0$ और $x + y = 1$ से घिरे त्रिभुजाकार क्षेत्र के संगत w -तल में क्षेत्र निर्धारित करें।

- (b) Find the image of $|z - 3i| = 3$ under the mapping $w = \frac{1}{z}$. 4

मैपिंग $w = \frac{1}{z}$ के अंतर्गत $|z - 3i| = 3$ का प्रतिबिम्ब ज्ञात करें।

8. (a) Show that the cross ratio remains invariant under Mobius transformation. 4

दर्शाइए कि मोबियस रूपांतरण के अंतर्गत क्रॉस अनुपात अपरिवर्तित रहता है।

- (b) Find all the Mobius transformation which map the half plane $I(z) \geq 0$ into circle $|w| \leq 1$. 4

सभी मोबियस रूपांतरण ज्ञात कीजिए जो अर्धतल $I(z) \geq 0$ को वृत्त $|w| \leq 1$ में मैप करते हैं।

SECTION - V

खण्ड - V

9. (a) If $u = x^2 - y$, $v = x + y$, then evaluate :

2

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

यदि $u = x^2 - y$, $v = x + y$, तो मूल्यांकन करें :

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

- (b) Evaluate :

1

$$\int_0^2 (8 - x^3)^{-\frac{1}{3}} dx$$

मूल्यांकन करें :

$$\int_0^2 (8 - x^3)^{-\frac{1}{3}} dx$$

- (c) Find the Fourier coefficient a_0 for the function $f(x) = x$ in $[-\pi, \pi]$.

1

$[-\pi, \pi]$ में फलन $f(x) = x$ के लिए फूरियर गुणांक a_0 ज्ञात करें।

- (d) Find the image of the point $1 + i$ on the sphere of radius $\frac{1}{2}$ and centre $(0, 0, \frac{1}{2})$.

2

त्रिज्या $\frac{1}{2}$ और केंद्र $(0, 0, \frac{1}{2})$ के गोले पर बिंदु $1 + i$ का प्रतिबिम्ब ज्ञात करें।

(e) Define conformal mapping. 1

अनुरूप मानचित्रण को परिभाषित करें।

(f) Find the fixed points of the Mobius transformation

$$w = \frac{3z - 4}{z - 1}. \quad 1$$

मोबियस रूपांतरण $w = \frac{3z - 4}{z - 1}$ के निश्चित बिंदु ज्ञात करें।

Roll No.

94107

**B. Sc. Mathematics 6th Semester
Examination – December, 2024**

LINEAR ALGEBRA

Paper : 12BSM-362

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 40

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt *five* questions in all, selecting *one* question from each Section. Question No. 9 (Section-V) is *compulsory*.

प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड-V) अनिवार्य है।

SECTION - I

खण्ड - I

1. (a) Show that the set $\{(2, -1, 0), (3, 5, 1), (1, 1, 2)\}$ forms a basis of \mathbb{R}^3 .

3.5

दर्शाइए कि समुच्चय $\{(2, -1, 0), (3, 5, 1), (1, 1, 2)\}$, \mathbb{R}^3 का आधार बनाता है।

- (b) Show that the union of two subspaces of a vector space is also a subspace if and only if one is contained in the other.

3.5

दर्शाइए कि सदिश समष्टि के दो उपसमष्टियों का संघ भी एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि एक दूसरे में समाहित हो।

2. (a) Show that the set $\{x^3 - x + 1, x^3 + 2x + 1, x + 1\}$ is linearly independent set of vectors in the vector space of all polynomials over the field of real numbers.

3.5

दर्शाइए कि समुच्चय $\{x^3 - x + 1, x^3 + 2x + 1, x + 1\}$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र पर सभी बहुपदों के सदिश समष्टि में सदिशों का रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय है।

(b) If W be a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$, then prove that $\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$.

3.5

यदि W एक परिमित आयामी सदिश समष्टि $V(F)$ का उपसमष्टि हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$.

SECTION - II

खण्ड - II

3. Find range space and null space of the linear transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ defined by $T(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2)$ and verify the Sylvester law. 7

$T(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2)$ द्वारा परिभाषित रेखिक रूपान्तरण $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ का रेंज स्पेस और शून्य स्पेस ज्ञात करें और सिल्वेस्टर नियम को सत्यापित करें।

4. (a) If two finite dimensional vector spaces over the same field are isomorphic, then prove that they have the same dimension. 3.5

यदि एक ही क्षेत्र पर दो परिमित आयामी सदिश समष्टि एकैकसमाकारी हैं, तो सिद्ध करें कि उनके आयाम समान हैं।

(b) If $A = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$ is basis of \mathbb{R}^3 , then find the dual basis of A. 3.5

यदि $A = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$, \mathbb{R}^3 का आधार है, तो A का द्वैत आधार ज्ञात करें।

SECTION - III

खण्ड - III

5. (a) Let $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation defined by $T(x, y, z) = (2x - y, x + y, y + 2z)$. Find the characteristics and minimal polynomial of T. 3.5

मान लें कि $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ एक रैखिक रूपान्तरण है जिसे $T(x, y, z) = (2x - y, x + y, y + 2z)$ द्वारा परिभाषित किया गया है। T की विशेषताएँ और न्यूनतम बहुपद ज्ञात कीजिए।

(b) If $C(\mathbb{R})$ is the vector space and T be linear transformation on $C(\mathbb{R})$ defined by $T(a + ib) = a - ib$ for all $a, b \in \mathbb{R}$, then find the matrix of T with respect to ordered basis $B = \{1 + i, 1 + 2i\}$. 3.5

यदि $C(\mathbb{R})$ सदिश समष्टि है और T, $C(\mathbb{R})$ पर रैखिक रूपान्तरण है, जो सभी $a, b \in \mathbb{R}$ के लिए $T(a + ib) = a - ib$ द्वारा परिभाषित है, तो क्रमित आधार $B = \{1 + i, 1 + 2i\}$ के संबंध में T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

6. (a) Let a linear transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ given by $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ where a, b, c, d are reals, then find the condition for which L.T. is singular. 3.5

मान लीजिए कि रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ द्वारा दिया गया है, जहाँ a, b, c , वास्तविक हैं, तो वह शर्त ज्ञात कीजिए जिसके लिए L.T. विचित्र है।

- (b) Find the eigen values and a basis of each eigen space of the linear operator $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ defined by $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$. 3.5

$T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$ द्वारा परिभाषित रैखिक ऑपरेटर $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ के प्रत्येक आइगेन समष्टि के आइगेन मान और आधार ज्ञात कीजिए।

SECTION – IV

खण्ड – IV

7. (a) State and Prove Cauchy Schwarz inequality. 3.5

कौशी श्वार्ट्ज असमानता बताएँ और सिद्ध करें।

(b) Prove that : $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

3.5

सिद्ध करें कि : $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

8. State and Prove Bessel's inequality.

7

बेसेल की असमानता बताएँ और सिद्ध करें।

SECTION – V

खण्ड – V

9. (a) Define dimension of a vector space.

$6 \times 2 = 12$

सदिश समष्टि का आयाम परिभाषित करें।

(b) Define null space.

शून्य समष्टि को परिभाषित करें।

(c) Define inner product space.

आंतरिक उत्पाद समष्टि को परिभाषित करें।

(d) Define vector space.

सदिश समष्टि को परिभाषित करें।

(e) Find the norm of a vector $u = (2, -3, 6)$ and normalize the vector.

सदिश $u = (2, -3, 6)$ का नार्म ज्ञात करें और सदिश को सामान्यीकृत करें।

(f) Show that linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$ is singular.

दर्शाएँ कि $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$ द्वारा परिभाषित रेखिक रूपान्तरण $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ विचित्र है।

94108

**B. Sc. Mathematics 6th Semester
Examination – December, 2024**

DYNAMICS

Paper : 12BSM353/BM-363

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 40

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt *five* questions in all, by selecting *one* question from each Unit. Question No. 9 (Unit-V) is *compulsory* and carry 12 marks. Remaining all questions carry 7 marks each.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 9 (इकाई-V) अनिवार्य है और 12 अंकों का है। शेष सभी प्रश्नों के 7 अंक हैं।

UNIT - I

इकाई - I

1. (a) A particle describes on equiangular spiral $r = a e^{m\theta}$ with constant angular velocity. Find its velocity and acceleration. 3.5

एक कण निरंतर कोणीय वेग के साथ समकोणिक सर्पिल $r = a e^{m\theta}$ पर घूमता है। इसका वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए।

- (b) To a man going on a bicycle at 10 km/hr due east, the wind seems to blow from a direction 60° south of west at 6 km/hr. Find the direction and velocity of wind. 3.5

एक व्यक्ति जो 10 किमी/घंटा की गति से पूर्व की ओर साइकिल पर जा रहा है, उसे लगता है कि हवा 6 किमी/घंटा की गति से पश्चिम से 60° दक्षिण की ओर से आ रही है। हवा की दिशा और वेग ज्ञात कीजिए।

2. (a) To obtain the expression for velocity and position of a particle executing Simple Harmonic Motion. 3.5

सरल हार्मोनिक गति करने वाले एक कण के वेग और स्थिति के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।

- (b) A light elastic string of length 4 m has one end fixed at A and to the other end is attached a mass, which in equilibrium extends the string by 1 m. If the stone be dropped from A, find the maximum extension produced. 3.5

4 मीटर लंबाई की एक हल्की लोचदार डोरी का एक सिरा A पर स्थिर है और दूसरे सिरे पर एक द्रव्यमान जुड़ा हुआ है, जो संतुलन में डोरी को 1 मीटर तक बढ़ाता है। यदि पत्थर को A से गिराया जाए, तो उत्पन्न अधिकतम विस्तार ज्ञात कीजिए।

UNIT - II

इकाई - II

3. (a) A mass of 10 kg, falls freely a distance of 10 m from rest and is then brought to rest after penetrating through 1 m in sand. Find the average force exerted by the sand on it. 3.5

10 kg का एक द्रव्यमान, विरामावस्था से 10 मीटर की दूरी तक स्वतंत्र रूप से गिरता है और फिर रेत में 1 मीटर तक प्रवेश करने के बाद विरामावस्था से वापस आ जाता है। रेत द्वारा उस पर लगाया गया औसत बल ज्ञात कीजिए।

- (b) If the string of an Atwoods machine can bear a strain of only $\frac{1}{8}$ of the sum of two weights, show that the least possible acceleration is $\frac{\sqrt{3}}{2}g$. 3.5

यदि एटवुड्स मशीन की डोरी $\frac{1}{8}$ केवल दो भारों के योग का तनाव सहन कर सकती है, तो दर्शाइए कि न्यूनतम संभव त्वरण $\frac{\sqrt{3}}{2}g$ है।

4. (a) State and prove principle of work and energy. 3.5
कार्य और ऊर्जा के सिद्धांत को बताएं और सिद्ध करें।
- (b) To derive the expression for work done in stretching an elastic string. 3.5

एक प्रत्यास्थ डोरी को खींचने में किए गए कार्य के लिए व्यंजक व्युत्पन्न करें।

UNIT - III

इकाई - III

5. A particle slides down the outside of a smooth vertical circle starting from rest at the highest point. Discuss the motion. 7

एक कण सबसे ऊंचे बिंदु पर विरामावस्था से शुरू करते हुए एक चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्त के बाहर नीचे की ओर फिसलता है। गति पर चर्चा करें।

6. (a) How must a ball be projected from a height of 4 ft., so as just to clear a wall of 13 ft. high, distant 15 ft. in a horizontal direction and a ditch 5 ft. wide on the other side of the wall. 3.5

एक गेंद को 4 फीट की ऊँचाई से किस प्रकार प्रक्षेपित किया जाना चाहिए, ताकि वह क्षैतिज दिशा में 13 फीट ऊंची, 15 फीट दूर एक दीवार और दीवार के दूसरी ओर 5 फीट चौड़ी खाई को पार कर सके।

- (b) A Body is projected at an angle α to the horizon so as to clear two walls of equal height 'a' at a distance $2q$ from each other. Show that range is equal to $2a \cot \left(\frac{\alpha}{2} \right)$. 3.5

एक पिंड को क्षितिज से α कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है ताकि एक दूसरे से $2q$ दूरी पर समान ऊँचाई 'a' की दो दीवारें साफ हो जाएँ। दिखाएँ कि परास $2a \cot \left(\frac{\alpha}{2} \right)$ के बराबर है।

UNIT - IV

इकाई - IV

7. (a) A particle describe the equiangular spiral $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ under a force to the pole. Find the law of force. 3.5

एक कण ध्रुव पर बल के तहत समकोणिक सर्पिल $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ का वर्णन करता है। बल का नियम ज्ञात करें।

(b) A particle moves with a central acceleration $\frac{\lambda}{(\text{distance})^3}$. Find the path and distinguish the cases.

3.5

एक कण केंद्रीय त्वरण $\frac{\lambda}{(\text{distance})^3}$ के साथ गति करता है।
पथ ज्ञात करें और मामलों में अंतर करें।

8. To establish the equivalence of Kepler's laws for planetary motion and Newton's laws of Gravitation. 7
ग्रहों की गति के लिए केप्लर के नियमों और न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण के नियमों की समानता स्थापित कीजिए।

UNIT - V

इकाई - V

9. (a) Define relative velocity with *two* examples.

दो उदाहरणों के साथ सापेक्ष वेग को परिभाषित करें।

(b) Define mass, momentum and force.

द्रव्यमान, संवेग और बल को परिभाषित करें।

(c) Define conservative & impulsive forces.

संरक्षी और आवेगी बलों को परिभाषित करें।

(d) Define : Time of Flight, Horizontal Range, Maximum Horizontal Range, Greatest Height.

परिभाषित करें : उड़ान का समय, क्षैतिज सीमा, अधिकतम क्षैतिज सीमा, सबसे बड़ी ऊँचाई।

(e) Define Kepler's Laws of planetary motion.

ग्रहों की गति के केप्लर के नियमों को परिभाषित करें।

(f) Write the Geometrical properties of an Ellipse.

$2 \times 6 = 12$

दीर्घवृत्त के ज्यामितीय गुण लिखें।
